§14. 巴系と重複度

◎ $(A, \mathfrak{m})$: Noether. local に対し、

$$\dim A = \min\{r \mid \exists a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{m},\ a_1, \ldots, a_r \text{ は } \mathfrak{m}\text{-準素イデアルを生成}\}$$

◎ M : f.g. A-Mod に対し、

$$\dim M = \delta(M) = \min\{s \mid \exists y_1, \ldots, y_s \in \mathfrak{m},\ \ell(M/(y_1, \ldots, y_s)M) < \infty\}$$

だった。

Def. $(A, \mathfrak{m})$: Noether. local, $\dim A = r$.

- $a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ が A の**パラメタ系** (system of parameters)
  巴系 (s.o.p.)
  $\Leftrightarrow$ $a_1, \ldots, a_r$ が $\mathfrak{m}$-準素イデアルを生成する。

M : f.g. A-Mod. $\dim M = s$. に対し

- $y_1, \ldots, y_s \in \mathfrak{m}$ が M の**パラメタ系, 巴系**
  $\Leftrightarrow$ $\ell(M/(y_1, \ldots, y_s)M) < \infty$.

Def. $(A, \mathfrak{m}, k)$: Noether, local.

- **em.dim A** $:= \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$

Rmk. 一般に $\dim A \le \text{em.dim}\, A$.

∵ $\text{em.dim}\, A = \min\{r \mid \exists \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,\ A/\mathfrak{m} \text{ 上 } \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \text{ を生成}\}$

$\overset{\text{Thm.2.3}}{=} \min\{r \mid \exists a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{m},\ A \text{ 上 } \mathfrak{m} \text{ を生成}\} \le \dim A$.

Def. $(A, \mathfrak{m})$: Noether. local, $\dim A = r$.

- A が**正則局所環** (regular local ring) $\Leftrightarrow$ $\dim A = \text{em.dim}\, A$

  このとき、$\mathfrak{m}$ 自身が r 元で生成されるので、

  この r 元 (巴系) を**正則巴系**という。

Thm. 14.1 $(A, \mathfrak{m})$: Noether, local.

i) 任意の巴系 P に対し、任意の $F \subseteq P$ で
$$\dim A/(F) = \dim A - |F| \qquad (\because \text{Thm. 13.6})$$

ii) ある巴系 P が存在し、任意の $F \subseteq P$ で
$$\mathrm{ht}(F) = |F| \qquad (\text{cf. P38 (ht の def)})$$

prf. ii) $r = \dim A$.

$(r=0)$ 0 が $\mathfrak{m}$-primary で 巴系 $= \emptyset$.

$(r=1)$ 任意の巴系 $\{x\}$ で
$$\mathrm{ht}(x) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \mid (x) \subseteq \mathfrak{p}\} = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = \dim A = 1 = |\{x\}|.$$
(x) : $\mathfrak{m}$-primary より $\sqrt{(x)} = \mathfrak{m}$. (x) を含むのは $\mathfrak{m}$ のみ.

$(r>1)$

Step 1
- $\{\mathfrak{p}_{0j}\}_{1 \le j \le e_0}$: A の極小素イデアル全体とする. ($\because$ 有限個だった)
- $x_1 \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{j=0}^{e_0} \mathfrak{p}_{0j}$ を取る. ($\because$ prime avoidance)
- $\mathrm{ht}(x_1) = 1$. $\left(\because 1 \overset{\text{Hauptidealsatz}}{\geq} \mathrm{ht}(x_1) \overset{\mathfrak{p}_{0j} \supseteq (x_1)\text{ とならないよう取ったため}}{>} 0\right)$

Step 2
- $\{\mathfrak{p}_{1j}\}_{1 \le j \le e_1}$: (x_1) の極小素因子全体とする. ($\because$ 有限個だった)
- $x_2 \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{j=0}^{e_0} \mathfrak{p}_{0j} \cup \bigcup_{j=0}^{e_1} \mathfrak{p}_{1j}$ を取る. ($\because$ prime avoidance)
- $\mathrm{ht}(x_2) = 1$. ($\because$ Step 0 と同様)
- $\mathrm{ht}(x_1, x_2) = 2$. ($\because$ (x_1) の素因子のうち高度 1 のものは (x_2) を含まない.)

⋮

Step r まで続けて $x_1, \ldots, x_r$ が構成できる. Thm. 14.1 □

{ Step 3 $\mathrm{ht}(x_3) = 1$, $\mathrm{ht}(x_1, x_3) = \mathrm{ht}(x_2, x_3) = 2$, $\mathrm{ht}(x_1, x_2, x_3) = 3$

Rmk. 任意の巴系で $\mathrm{ht}(F) = |F|$ とは限らない. ($\leq$ は高度定理)

e.g. k: 体, $R = k[[X, Y, Z]]$

$$I = (X) \cap (Y, Z), \quad A = R/I \ni x, y, z, \quad \mathfrak{m} = (x, y, z)$$

∘ $\dim A = 2$.

∵ 極小素イデアルは (x) と (y, z) だが、

・$\max\{(x,y,z) \supsetneq \cdots \supsetneq (x)\} \leq \dim A/(x)$

$$= \dim R/(X) = \dim k[[Y, Z]] = 2$$

・$\max\{(x,y,z) \supsetneq \cdots \supsetneq (y,z)\} \leq \dim A/(y,z)$

$$= \dim R/(Y,Z) = \dim k[[X]] = 1.$$

・一方 $(x, y, z) \supsetneq (x, y) \supsetneq (x)$.

∘ $y, x+z$ は A の巴系.

∵ $xz = 0$ なので

$$\mathfrak{m}^2 = (x, y, z)^2 = (\underset{\substack{\parallel \\ x(x+z)}}{x^2}, y^2, \underset{\substack{\parallel \\ z(x+z)}}{z^2}, xy, yz, \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{xz}) \subseteq (y, x+z)$$

より $(y, x+z)$: $\mathfrak{m}$-準素.

∘ $\mathrm{ht}(y) = 0$. ($0 < |\{y\}|$ だよね. ということ)

∵ $\mathrm{ht}(y) = \inf\{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \mid y \in \mathfrak{p}\} \leq \mathrm{ht}(y, z) = 0$.

Thm. 14.2. $(R, \mathfrak{m}, k)$: regular local. $\dim = n$.

$x_1, \dots, x_i \in \mathfrak{m}$ に対し TFAE :

(1) $x_1, \dots, x_i$ は正則巴系の一部.

(2) $x_1, \dots, x_i$ の $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ での像が $R/\mathfrak{m}$ − 1次独立.

(3) $R/(x_1, \dots, x_i)$ は regular local, $\dim = n - i$.

prf.

((1) ⇒ (2)) $x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$: 正則巴系 (i.e. $\mathfrak{m}$ の生成元) に延長すると $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ での像が k 上 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ を生成するが $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n$ より独立.

((1) ⇒ (3)) $\dim = n - i$ ではあった. 延長した $x_{i+1}, \dots, x_n$ が $R/(x_1, \dots, x_i)$ の極大イデアルを生成するので正則.

((3) ⇒ (1)) $R/(x_1, \dots, x_i)$ の正則巴系の原像 $y_1, \dots, y_{n-i}$ をとれば $\mathfrak{m}$ は $x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_{n-i}$ で生成される.

((2) ⇒ (1)) 基底を延長して Thm. 2.3. を使う.

Thm. 14.2 □

Thm.14.3. 正則局所環は整域.

prf. $n = \dim(R, \mathfrak{m})$ についての帰納法.

($n=0$) 正則巴系 $= \emptyset$ より $\mathfrak{m} = (0)$, R は体.

($n=1$) Thm.11.2 (Noether local, $\dim > 0$, 極大が単項 $\Rightarrow$ DVR) より R : DVR.

($n \geq 2$) $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$: R の極小素イデアル とする.

Ex.1.6

$x \in \mathfrak{m} \setminus (\mathfrak{m}^2 \cup \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_r)$ がとれる. ($\because$ prime avoidance)

$\overline{x} \neq 0$ in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ より, R/xR は $n-1$ 次元 reg.local.

Thm.14.2

$\xrightarrow[\text{仮定}]{\text{帰納法の}}$ R/xR : 整域 i.e. xR : 素イデアル.

min.

$\mathfrak{p}_1 \subseteq xR$ とすると $\mathfrak{p}_1 = x\mathfrak{p}_1$.

$\because$ $y \in \mathfrak{p}_1$ なる ${}^\exists a$, $y = xa$. $x \notin \mathfrak{p}_1$ より $a \in \mathfrak{p}_1$.

NAK より $\mathfrak{p}_1 = (0)$.

$x \in \operatorname{rad} R$

Thm.14.3 $\square$

Thm. 14.4. (A, m, k) : regular, local. $\dim = d$

- $gr_m(A) \cong k[X_1, \ldots, X_d]$
- $\chi(n) = \binom{n+d}{d}$ $(\forall n \geq 0)$: A の Samuel 関数

prf.

- $k[X_1, \ldots, X_d] \twoheadrightarrow \bigoplus_{i=0}^{\infty} m^i/m^{i+1}$ により $gr_m(A) = k[\underbrace{X_1, \ldots, X_d}_{X\text{で略記.}}]/I$ ではある (I: 斉次)

  $0 \neq f \in I$ を仮定 (f: r次斉次)

  $n > r$ に対し $gr_m(A)$ の n次部分の長さは最高 $\binom{n+d-1}{d-1} - \binom{n-r+d-1}{d-1}$.

  $\because \ell(k[X]/I)_n \leq \ell(k[X]/(f))_n$ $\underset{例2}{\overset{P117}{=}}$ これ.

  これは n について d−2 次式以下.
  よって χ は d−1 次以下. $\left(\because \chi(n) = \sum_{i=0}^{n} \ell(gr_m(A))_i\right)$
  $\dim A = d$ に矛盾.

  よって $I = 0$.

- $\chi(n) = \sum_{i=0}^{n} \ell(gr_m(A))_i$

  $= \sum_{i=0}^{n} \ell(m^i/m^{i+1})$

  $= \sum_{i=0}^{n} \dim_k m^i/m^{i+1}$ ← $k[X_1, \ldots, X_d]$ の i次斉次全体 $= k$上 $\binom{i+d-1}{d-1}$ 次元

  $= \binom{n+d}{d}$.

Thm. 14.4 □

Def. $(A, \mathfrak{m})$: Noether, local.

$y_1, \dots, y_r \in \mathfrak{m}$ が 解析的独立 (analytically independent)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall F(Y_1, \dots, Y_r)$: A係数 n次斉次式, $F(y_1, \dots, y_r) = 0$

ならば Fの係数は全て $\mathfrak{m}$ に入る.

言いかえ:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{m}[Y_1, \dots, Y_r]_n \arrow[d] & \\
\mathrm{Ker} \arrow[r, hook] \arrow[ur, dotted, "\exists"] & A[Y_1, \dots, Y_r]_n \arrow[r, "{(y_1, \dots, y_r)}"', "\text{代入}"'] & \mathfrak{m}^n
\end{tikzcd}$$

Def. $(A, \mathfrak{m}, k)$: Noether, local. $x_1, \dots, x_s \in A$, $\mathfrak{q} = (x_1, \dots, x_s)$: $\mathfrak{m}$-準素イデアル

$f(X) \in k[X_1, \dots, X_s]_n$ が $\mathfrak{q}$ の 零形式

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の原像 $F(X) \in A[X_1, \dots, X_s]_n$ に対し $F(x_1, \dots, x_s) \in \mathfrak{q}^n \mathfrak{m}$.

i.e.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{m}[X_1, \dots, X_s]_n \arrow[d] \arrow[rrdd, bend left, "0"] & & \\
K \arrow[r, hook] \arrow[ur, "\exists"] & A[X_1, \dots, X_s]_n \arrow[r, two heads, "\text{surj}", "{(x_1, \dots, x_s)\ \text{代入}}"'] \arrow[d] & \mathfrak{q}^n \arrow[d] & \\
\mathfrak{n}_n \arrow[r, "\text{ker}"] & k[X_1, \dots, X_s]_n \arrow[r, dotted, two heads, "\text{生える}"'] & \mathfrak{q}^n / \mathfrak{q}^n \mathfrak{m} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & F(x_1, \dots, x_s) \arrow[d] \\
f \arrow[r, dotted, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

└ ここが $\mathfrak{q}$ の零形式の n次部分.

よって $k[x_1, \dots, x_s] / \mathfrak{n} \cong \bigoplus \mathfrak{q}^n / \mathfrak{q}^n \mathfrak{m}$.

$\mathfrak{n}_0 = \mathrm{Ker}(k \to \mathfrak{q}^0/\mathfrak{q}^0\mathfrak{m} = k) = 0$ より $\mathfrak{n} \subseteq (X_1, \dots, X_s)$ に注意.

特に $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ のとき, 零形式イデアル $= 0$ なら 解析的独立

Thm.14.5. 巴系は解析的独立.

prf. $(A, \mathfrak{m}, k)$: Noether, local. $\dim = d$. $x_1, \cdots, x_d$: 巴系.

○ $\mathfrak{q} = (x_1, \cdots, x_d)$: 巴系が定義する $\mathfrak{m}$-準素イデアル.

○ $\chi_A^{\mathfrak{q}}(n) = l(A/\mathfrak{q}^n)$ は $n >> 0$ で n について d 次の多項式 (Thm 13.4).

○ $\mathfrak{q}$ と巴系 $x_1, \cdots, x_d$ についての零形式イデアルを $\mathfrak{a}$ とすると、

$$k[X_1, \cdots, X_d]/\mathfrak{a} \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^n\mathfrak{m}. \quad (\text{次数つき alg の iso})$$

○ φ をこれの Hilbert 多項式とする. 上の iso で右辺にうつって考えれば

(以下 $n >> 0$) $\varphi(n) = l(\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^n\mathfrak{m})$.

$= \dim_k(k \otimes_A \mathfrak{q}^n)$

$\overset{\text{Thm 2.3}}{=}$ $\mathfrak{q}^n$ の極小底の個数. より $A^{\oplus\varphi(n)} \twoheadrightarrow \mathfrak{q}^n$ があり. 特に

$\varphi(n) \geq l(\mathfrak{q}^n)$.

○ $\mathfrak{q}^n \otimes_A A/\mathfrak{q} \cong \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$ ← 一般論.

$$\begin{array}{ccc} l(\mathfrak{q}^n) \cdot l(A/\mathfrak{q}) & \geq & l(\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}) \\ \rotatebox{90}{$\geq$} & & \| \\ \varphi(n) & & \chi_A^{\mathfrak{q}}(n) - \chi_A^{\mathfrak{q}}(n-1) : d-1 \text{次}. \end{array}$$

$: d-1$ 次以上 ← より $\dim k[X_1, \cdots, X_d]/\mathfrak{a} \geq d$. i.e. $\mathfrak{a} = (0)$. Thm.14.5 □

Def. $(A,\mathfrak{m})$: Noether, local. $\dim = d$.
M : f.g. A-Mod.
$\mathfrak{q}$: A のある $\mathfrak{m}$-準素イデアル.

@ $\chi^{\mathfrak{q}}_M(n)$ は $n>>0$ で整数値をとる d次以下多項式なので…（d に $\overset{\dim M}{\shortparallel}$ と注記）

$\chi^{\mathfrak{q}}_M(n) = \frac{e}{d!}n^d + (\text{lower term}) \quad (n>>0)$ なる $e = e(\mathfrak{q},M) \in \mathbb{Z}$ がある.

Rmk.

□ 公式14.1. $e(\mathfrak{q},M) = \lim_{n\to\infty}\frac{d!}{n^d}\ell(M/\mathfrak{q}^n M)$

$d=0$ なら $e(\mathfrak{q},M) = \ell(M)$

□ 公式14.2. $\begin{cases} e(\mathfrak{q},M) > 0 & \text{if } \dim M = d \\ e(\mathfrak{q},M) = 0 & \text{if } \dim M < d \end{cases}$

□ 公式14.3. $e(\mathfrak{q}^r,M) = r^d\cdot e(\mathfrak{q},M) \quad \left(\because \chi^{\mathfrak{q}^r}_M(n) = \chi^{\mathfrak{q}}_M(rn)\right)$

□ 公式14.4. $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{q}'$: $\mathfrak{m}$-準素 に対し

$e(\mathfrak{q},M) \leq e(\mathfrak{q}',M) \quad \because$ by def.

@ $e(\mathfrak{q}) := e(\mathfrak{q},A)$: イデアル $\mathfrak{q}$ の重複度 (multiplicity)

@ $e(A) := e(\mathfrak{m})$: Aの重複度

e.g. A : regular local. なら $\chi(n) \underset{\text{Thm.4}}{=} \binom{n+d}{d} = \frac{1}{d!}n^d + \cdots$ より $e(A) = 1$.

Thm. 14.6. $(A, \mathfrak{m})$: Noether, local. $\mathfrak{q}$: $\mathfrak{m}$-準素.

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \quad : \text{ex.} \quad 全て \text{ f.g.}$$

$$\Rightarrow \quad e(\mathfrak{q}, M) = e(\mathfrak{q}, M'') + e(\mathfrak{q}, M') \qquad (\text{i.e. } 重複度は \text{ f.g. 上 } 加法的)$$

prf. $M' \subseteq M$ とみる.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \arrow[dddlll, bend left=60] & \\
0 \arrow[r] & M' \cap \mathfrak{q}^n M \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{q}^n M \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{q}^n M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & M'/M' \cap \mathfrak{q}^n M \arrow[r] & M/\mathfrak{q}^n M \arrow[r] & M''/\mathfrak{q}^n M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

; ex

$+$

; ex

$\Downarrow$ 蛇

: ex. (まぁここまでしなくても)

$$\Downarrow$$

$$\ell(M/\mathfrak{q}^n M) = \ell(M''/\mathfrak{q}^n M'') + \ell(M'/M' \cap \mathfrak{q}^n M)$$

ヤバい部分.

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{d!}{n^d}(-)$

$$e(\mathfrak{q}, M) = e(\mathfrak{q}, M'') + \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{d!}{n^d} (ヤバい部分)}$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathfrak{q}^n M' \overset{明らか}{\subseteq} M' \cap \mathfrak{q}^n M \overset{\text{Artin-Rees.}}{\leq} \mathfrak{q}^{n-c} M' \quad (\forall n > c) \text{ なる } c \text{ があり.} \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ \ell(M'/\mathfrak{q}^n M') \geq \ell(M/M' \cap \mathfrak{q}^n M) \geq \ell(M'/\mathfrak{q}^{n-c} M'). \end{array} \right.$$

$n \to \infty$ で (ヤバい部分) $\sim \ell(M'/\mathfrak{q}^n M')$ なので $\sim\sim = e(\mathfrak{q}, M')$

Thm. 14.6 $\square$

Thm.14.7. $(A,\mathfrak{m})$: Noether, local. $\dim = d$.

$\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_t\}$: $\dim(A/\mathfrak{p}) = d$ となる極小素イデアル全体とすると

$$e(\mathfrak{q}, M) = \sum_{i=1}^{t} e(\underbrace{\overline{\mathfrak{q}_i}}_{\text{A/p_i での q の像}}, A/\mathfrak{p}_i)\underbrace{\ell(M_{\mathfrak{p}_i})}_{\text{A_p-Mod としての長さ}} . \quad \cdots ☆$$

明らかに幾何的.

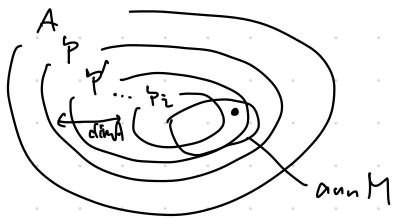
prf. $\sigma = \sum \ell(M_{\mathfrak{p}_i})$ についての帰納法.

($\sigma=0$) 右辺 $= 0$.

$\chi_M^{\mathfrak{q}}$ のd次coeff=0で

$\deg(\chi_M^{\mathfrak{q}}) = \dim M = \dim(A/\mathrm{ann}\,M) \overset{※}{<} \dim A = d$ より左辺 $= 0$.

※ $M_{\mathfrak{p}_i}=0$ より $\overset{M:f.g.}{}$ $(A-\mathfrak{p}_i)\cap \mathrm{ann}\,M \neq \emptyset$.
よって長さ $\dim A$ の鎖の最小元となりうる $\mathfrak{p}_i$ らは $\mathrm{ann}\,M$ を含まず、
$A/\mathrm{ann}\,M$ は長さ $\dim A$ の鎖を持たない.



($\sigma>0$) $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ なる $\mathfrak{p}\in\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_t\}$ がある.

↳ $\mathfrak{p}$ は $\mathrm{Supp}(M)$ の極小元で、$\mathrm{Ass}(M)$ に入る.

↳ M は $A/\mathfrak{p}$ に同型な部分加群 N をもつ.

· $e(\mathfrak{q},M) = e(\mathfrak{q},N) + e(\mathfrak{q},M/N)$

· $N_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$: 体より
$\ell(N_{\mathfrak{p}}) = 1$ かつ
$\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}$ なら $N_{\mathfrak{p}_i} = 0$.

· $\ell((M/N)_{\mathfrak{p}_i}) = \ell(M_{\mathfrak{p}_i}) - \delta_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}_i}$
なので σ は M から1減少.

⇝ 帰納法の仮定から☆は成立.

· $e(\mathfrak{q}, A/\mathfrak{p}) = e(\overline{\mathfrak{q}}, A/\mathfrak{p})$

$\because \chi^{\mathfrak{q}}_{A/\mathfrak{p}}(n) = \ell((A/\mathfrak{p})/\mathfrak{q}^{n+1}(A/\mathfrak{p}))$
$= \ell((A/\mathfrak{p})/\overline{\mathfrak{q}}^{n+1}(A/\mathfrak{p})) = \chi^{\overline{\mathfrak{q}}}_{A/\mathfrak{p}}(n)$

⇝ 自明に☆は成立.

→ 左辺 M で☆が成立.

Thm.14.7 □

よって A : 整域 で $e(q, A)$ が 決定できれば よい.

このとき $\{(0)\}$ のみ 現れ. $l(M_{(0)}) = \mathrm{rank}\, M$ なので

Thm. 14.8. (A, m) : Noether, local, domain. q : m-準素イデアル

M : f.g. A-Mod に対し $e(q, M) = e(q) \cdot \mathrm{rank}(M)$.

Thm. 14.9. $(A, \mathfrak{m})$: Noether, local. $\mathfrak{q}$: $\mathfrak{m}$-準素イデアル

- $x_1, \cdots, x_d \in \mathfrak{q}$: A の巴系, $x_i \in \mathfrak{q}^{\nu_i}$.

M : f.g. A-Mod に対し $s = 1, \cdots, d$ で

$$e(\mathfrak{q}/(x_1, \cdots, x_s), M/(x_1, \cdots, x_s)M) \geq \nu_1 \cdots \nu_s \, e(\mathfrak{q}, M).$$

特に $s = d$ とすれば、$A/(x_1, \cdots, x_s)$ は0次元なので公式14.1より

$$l(M/(x_1, \cdots, x_d)M) \geq \nu_1 \cdots \nu_s \, e(\mathfrak{q}, M).$$

prf. $s = 1$ で示せば帰納的に従う。

$A' = A/x_1A$, $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}/x_1A$, $M' = M/x_1M$, $\nu = \nu_1$ とおく。

Thm. 1 より $\dim A' = \dim A - 1$.

$$\begin{aligned} l(M'/\mathfrak{q}'^n M') &= l(M/x_1M + \mathfrak{q}^nM) \\ &= l(M/\mathfrak{q}^nM) - l(\underbrace{x_1M + \mathfrak{q}^nM/\mathfrak{q}^nM}_{\cong \text{ 同型定理}}) \end{aligned}$$

$$x_1M/x_1M \cap \mathfrak{q}^nM \ni x_1\bar{m}$$

$$\cong\uparrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$M/(\underbrace{\mathfrak{q}^nM : x_1}_{\cup\!\!\!|}) \ni \bar{m}$$

$$\mathfrak{q}^{n-\nu}M \qquad \because x_1 \in \mathfrak{q}^\nu$$

$$\therefore l(M'/\mathfrak{q}'^n M') \geq l(M/\mathfrak{q}^nM) - l(M/\mathfrak{q}^{n-\nu}M)$$

ひとつずれるけど-

$$\chi_{M'}^{\mathfrak{q}'}(n) \geq \chi_M^{\mathfrak{q}}(n) - \chi_M^{\mathfrak{q}}(n-\nu)$$

$n \gg 0$

$$\frac{e(\mathfrak{q}', M')}{(d-1)!} n^{d-1} + (\text{低次}) \qquad \frac{e(\mathfrak{q}, M)}{d!} n^d - \frac{e(\mathfrak{q}, M)}{d!} (n-\nu)^d + (\text{低次})$$

$$= \frac{e(\mathfrak{q}, M)}{(d-1)!} \nu \cdot n^{d-1} + (\text{低次})$$

$$\hookrightarrow e(\mathfrak{q}', M') \geq \nu \cdot e(\mathfrak{q}, M).$$

Thm. 14.9. □

特に，$M = A$: d次元 Noether local ととれば

Thm. 14.10. $(A, \mathfrak{m})$: Noether, local.

- $x_1, \dots, x_d$: 巴系，$\mathfrak{q} = (x_1, \dots, x_d)$ に対し

$$l(A/\mathfrak{q}) \geq e(\mathfrak{q}).$$

- さらに $x_i \in \mathfrak{m}^\nu$ $(\forall i)$ なる

$$l(A/\mathfrak{q}) \geq \nu^d e(\mathfrak{m}).$$

$x_1, \dots, x_d$ が A の巴系なら，$x_1^{\nu_1}, \dots, x_d^{\nu_d}$ も A の巴系なので

$\because$ $\mathfrak{m}^r \subseteq (x_1, \dots, x_d)$ なる $\mathfrak{m}^{r(\nu_1 + \cdots + \nu_d)} \subseteq (x_1^{\nu_1}, \dots, x_d^{\nu_d})$

Cor.

$$e(\mathfrak{q}, M) \leq \frac{l(M/(x_1^{\nu_1}, \dots, x_d^{\nu_d})M)}{\nu_1 \cdots \nu_d}$$

という形で覚えておく．

cf. Thm. 14.12 (Lechの補題)

上の式が $\min(\nu_i) \to \infty$ で $=$ となることを言う．

Thm. 14.11. $(A, \mathfrak{m})$: Noether, local.

$x_1,\dots,x_d$: 巴系 , $\mathfrak{q} = (x_1,\dots,x_d)$, M : f.g. A-Mod

$A' = A/x_1A$, $M' = M/x_1M$, $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}/x_1A = x_2A' + \cdots + x_dA'$

x_1 が M-正則なら $e(\mathfrak{q}, M) = e(\mathfrak{q}', M')$

$M \xrightarrow{x_1\text{倍}} M$ が inj.

prf.

$$\ell(M'/\mathfrak{q}'^{n+1}M') = \ell(M/x_1M + \mathfrak{q}^{n+1}M)$$

$$\underbrace{\ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M)}_{\chi^{\mathfrak{q}}_M(n)\ d\text{次}} - \underbrace{\ell(M'/\mathfrak{q}'^{n+1}M')}_{\chi^{\mathfrak{q}'}_{M'}(n)\ d-1\text{次}} = \ell(x_1M + \mathfrak{q}^{n+1}M/\mathfrak{q}^{n+1}M)$$

$\cong$ 同型定理

$x_1M / x_1M \cap \mathfrak{q}^{n+1}M$

$\cong \uparrow x_1$倍

$M/(\mathfrak{q}^{n+1}M : x_1)$

$$= \underbrace{\ell(M/\mathfrak{q}^nM)}_{d\text{次}\ \chi^{\mathfrak{q}}_M(n-1)} - \ell((\mathfrak{q}^{n+1}M : x_1)/\mathfrak{q}^nM)$$

無視したい。

($\mathfrak{a} = x_2A + \cdots + x_dA$ とおくと $\mathfrak{q} = x_1A + \mathfrak{a}$.
$\mathfrak{q}^{n+1} = x_1\mathfrak{q}^n + \mathfrak{a}^{n+1}$

$x_1,\dots,x_d$ の $n+1$次式は
$x_1 \times$($x_1 \sim x_d$ の $n-1$次式)
+($x_2 \sim x_d$ の n次式)

$$\mathfrak{q}^{n+1}M : x_1 = (x_1\mathfrak{q}^nM + \mathfrak{a}^{n+1}M) : x_1 = \mathfrak{q}^nM + (\mathfrak{a}^{n+1}M : x_1).$$

(Artin-Rees より $\exists c$, $\forall n > c$, $\mathfrak{a}^{n+1}M \cap x_1M = \mathfrak{a}^{n-c}(\mathfrak{a}^{c+1}M \cap x_1M)$

$\mathfrak{a}^{n-c}(\mathfrak{a}^{c+1}M \cap x_1M) \subset \mathfrak{a}^{n-c}(x_1M)$, $\mathfrak{a}^{n-c}(x_1M) \uparrow \mathfrak{a}^{n-c}M$

$x_1M \supseteq \mathfrak{a}^{n+1}M \cap x_1M$

x_1倍 を通じて

$M \supseteq (\mathfrak{a}^{n+1}M : x_1) \subseteq \mathfrak{a}^{n-c}M$ よって

$$(\mathfrak{q}^nM + (\mathfrak{a}^{n+1}M : x_1))/\mathfrak{q}^nM \subseteq (\mathfrak{q}^nM + \mathfrak{a}^{n-c}M)/\mathfrak{q}^nM$$

同型定理

$$\cong \mathfrak{a}^{n-c}M / \mathfrak{a}^{n-c}M \cap \mathfrak{q}^nM$$

$\mathfrak{a}^{n-c}M / \mathfrak{a}^{n-c}M \cap \mathfrak{q}^n M$ は $A/\mathfrak{q}^c$ - Mod になる.

($\because$ $a \in \mathfrak{q}^c$ なら, $\mathfrak{a}^{n-c}M \subseteq \mathfrak{q}^{n-c}M$ の元の a 倍は $\mathfrak{q}^n M$ に入る.

$\mathfrak{a}$ は $d-1$ 元生成 だから $\mathfrak{a}^{n-c}$ は $\binom{n-c+d-2}{d-2}$ 元で生成される.

$$\ell(\underline{\mathfrak{a}^{n-c}M/\mathfrak{a}^{n-c}M \cap \mathfrak{q}M}) \overset{\spadesuit}{\leq} \underbrace{\binom{n-c+d-2}{d-2}}_{\mathfrak{a}^{n-c}M\text{の生成元の数}} \cdot \ell(A/\mathfrak{q}^c) \cdot \underset{:=M\text{の生成元の数}}{m}$$

$\rightsquigarrow$ n の $d-2$ 次式. 無視できる.

$$[\chi_{M'}^{\mathfrak{q}'}(n)]_{d-1} = [\chi_M^{\mathfrak{q}}(n) - \chi_M^{\mathfrak{q}}(n-1)]_{d-1} + (d-2\text{次以下})$$

$\hookrightarrow$ $e(\mathfrak{q}', M') = e(\mathfrak{q}, M)$.

Thm. 14.11 □

$$\frac{e(\mathfrak{q}',M')}{(d-1)!} n^{d-1} \qquad \frac{e(\mathfrak{q},M)}{d!} n^d - \frac{e(\mathfrak{q},M)}{d!} \underset{n^d - dn^{d-1} + \cdots}{(n-1)^d}$$

$$= d\frac{e(\mathfrak{q},M)}{d!} n^{d-1}$$

次のための

Lemma. $(A, \mathfrak{m})$: Noether, local. $x_1, \ldots, x_d$: 巴系. $s > 0$.

$A/x_1^s A$ において $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_d}$ は巴系.

└ $d-1$ 次元.

$\because$

$$\begin{aligned} & A/x_1^s A \,/\, (\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_d})(A/x_1^s A) \\ \cong\ & A/x_1^s A \,/\, ((x_2, \ldots, x_d)A + x_1^s A)/x_1^s A \\ \cong\ & A \,/\, (x_2, \ldots, x_d)A + x_1^s A \\ \cong\ & A \,/\, (x_1^s, x_2, \ldots, x_d)A \end{aligned}$$

$\mathfrak{m}^r \subseteq (x_1, \ldots, x_d)$ なる r をとれば,

$\mathfrak{m}^{sr} \subseteq (x_1^s, x_2, \ldots, x_d)$ より $(x_1^s, x_2, \ldots, x_d)$: $\mathfrak{m}$-準素.

Lemma. □

Thm. 14.12 (Lechの補題)

$(A, \mathfrak{m})$: Noether, local. $x_1, \cdots, x_d$: 巴系. $q = (x_1, \cdots, x_d)$

M : f.g. A-Mod に対し

$$e(q, M) = \lim_{\min(\nu_i) \to \infty} \frac{l(M/(x_1^{\nu_1}, \cdots, x_d^{\nu_d})M)}{\nu_1 \cdots \nu_d}$$

prf. d についての帰納法.

$(d=0)$ 両辺 $= l(M)$. $(d=1)$ $e(q, M) = \lim_{\nu \to \infty} \dfrac{l(M/x_1^{\nu} M)}{\nu}$ は定義.

$(d>1)$ $N_j = \mathrm{Ker}(M \xrightarrow{x_1^j 倍} M)$ とおき、増大列が停留する c を取る.

- $M' = x_1^c M$ とおくと x_1 は M'-正則.

LHS

- $0 \longrightarrow N_c \longrightarrow M \xrightarrow{x_1^c 倍} M' \longrightarrow 0$: ex.

$x_1^c A \subseteq \mathrm{ann}\, N_c$ なので $\dim N_c = \dim A/\mathrm{ann}\, N_c$
$\leq \dim A/x_1^c A$
$= \dim A/x_1 A = d-1$.

よって $\chi_{N_c}^q$ は $d-1$ 次以下で、$e(q, N_c) = 0$.

$\rightsquigarrow$ $e(q, M) = e(q, M')$.

RHS

- $x_2, \cdots, x_d$ は $A/x_1^c A$: $d-1$次元 の 巴系. $\because$ Lemma.
  N_c は $A/x_1^c A$-Mod.

帰納法の仮定 $\exists C$: 定数, $l(N_c/(x_2^{\nu_2}, \cdots, x_d^{\nu_d})N_c) < C\, \nu_2 \cdots \nu_d$ ($\min(\nu_i) \to \infty$ で)

$\nu_1 > c$ なら $x_1^{\nu_1} N_c = 0$ より

$$l(N_c/(x_2^{\nu_2}, \cdots, x_d^{\nu_d})N_c) = l(N_c/(x_1^{\nu_1}, x_2^{\nu_2}, \cdots, x_d^{\nu_d})N_c)$$

VI P134上部. 同型定理とかで片付く

$$l(M/(x_1^{\nu_1}, \cdots, x_d^{\nu_d})M) - l(M'/(x_1^{\nu_1}, \cdots, x_d^{\nu_d})M')$$

$$\rightsquigarrow \lim_{\min(\nu_i) \to \infty} \frac{l(M/(x_1^{\nu_1}, \cdots, x_d^{\nu_d})M) - l(M'/(x_1^{\nu_1}, \cdots, x_d^{\nu_d})M')}{\nu_1 \cdot \nu_2 \cdots \nu_d} = 0.$$

i.e. Mについての主張 $\Longleftrightarrow$ M'についての主張

↳ x_1 が正則な状態に強められた.

x_1: M-正則だとする。すると前 Thm. が使えて

$$e(\mathfrak{q}, M) = e(\bar{\mathfrak{q}}, \bar{M}) \quad (\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}/x_1 A,\ \bar{M} = M/x_1 M). \quad \cdots ✡$$

$E = (x_2^{\nu_2}, \dots, x_d^{\nu_d})M$, $F = M/E$ とかくことにすると。

$$
\begin{aligned}
\underline{e(\mathfrak{q}, M)\cdot \nu_1 \cdots \nu_d} &\overset{\text{Thm.9}}{\leq} \underline{l(M/(x_1^{\nu_1}, \dots, x_d^{\nu_d})M)} \\
&= l(F/x_1^{\nu_1}F) \\
&= \sum_{i=1}^{\nu_1} l(x_1^{i-1}F/x_1^{i}F) \\
&\leq \nu_1 l(F/x_1F) \\
&= \nu_1 l(M/x_1M + E) \\
&= \underline{\nu_1 l(\bar{M}/(x_2^{\nu_2}, \dots, x_d^{\nu_d})\bar{M})}
\end{aligned}
$$

正則

$x_1F \subseteq \mathrm{Ker}\left(F \xrightarrow{x_1^{i-1}\text{倍}} x_1^{i-1}F/x_1^iF\right)$ より。

$a(M/N) = aM+N/N$

$(x_2^{\nu_2}, \dots, x_d^{\nu_d})(M/x_1M)$

$= x_1M + (x_2^{\nu_2}, \dots, x_d^{\nu_d})M / x_1M$

$= (x_1M + E)/x_1M$

A/x_1-Mod として帰納法の仮定が使える対象。

$\nu_1 \cdots \nu_d$ でわる

$$
\begin{aligned}
e(\mathfrak{q}, M) &\leq \lim_{\min(\nu_i)\to\infty} \frac{l(M/(x_1^{\nu_1}, \dots, x_d^{\nu_d})M)}{\nu_1 \cdots \nu_d} \\
&\leq \lim_{\min(\nu_i)\to\infty} \frac{l(\bar{M}/(x_2^{\nu_2}, \dots, x_d^{\nu_d})\bar{M})}{\nu_2 \cdots \nu_d} \\
&\overset{\text{帰納法の仮定}}{=} e(\bar{\mathfrak{q}}, \bar{M}) \\
&\overset{✡}{=} e(\mathfrak{q}, M)
\end{aligned}
$$

で等号成立。

Thm.14.12 □

重複度は Koszul 複体（なんか環の情報がドバドバ出てくるヤバ複体）の Euler 標数（i.e. ホモロジーの長さの交代和）らしい

⟶ そりゃ大事かも。

ここまで 重複度 $e(\mathfrak{q}, M)$ のまとめ：

(Thm.7)

$$e(\mathfrak{q}, M) = \sum_{i=1}^{t} e(\overline{\mathfrak{q}_i}, \underbrace{A/\mathfrak{p}_i}_{\text{整域}})\, \ell(M_{\mathfrak{p}_i})$$

加群でのイデアルの重複度

$\Downarrow$ 帰着

整域のイデアルの重複度

巴系 $x_1, \cdots, x_d$ で生成される $\mathfrak{q}$：$\mathfrak{m}$-準素イデアルに対し

(定義)

$$e(\mathfrak{q}, M) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ell(M/(x_1, \cdots, x_d)^n M)\cdot d!}{n^d}$$

生成元らの n 次単項式全て … 扱いにくい。

(Thm.9)

$$e(\mathfrak{q}, M) \leq \frac{\ell(M/(x_1^{\nu_1}, \cdots, x_d^{\nu_d})M)}{\nu_1 \cdots \nu_d}$$

(Thm.10) x_1：M-正則なら

$$e(\mathfrak{q}, M) = e(\underbrace{\mathfrak{q}/x_1}_{\text{次元が下がる}}, M/x_1)$$

次元が下がる.

$\downarrow \min(\nu_i) \to \infty$

(Thm.12)

$$e(\mathfrak{q}, M) = \lim_{\min(\nu_i)\to\infty} \frac{\ell(M/(x_1^{\nu_1}, \cdots, x_d^{\nu_d})M)}{\nu_1 \cdots \nu_d}$$

Def. A：環．$\mathfrak{a}$：イデアル.

イデアル $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ の 節減 (reduction)

$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ かつ ある $r > 0$ で $\mathfrak{a}^{r+1} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^r$.

$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ の節減で $\mathfrak{a}^{r+1} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^r$ なら $\forall n > 0$, $\mathfrak{a}^{r+n} = \mathfrak{b}^n\mathfrak{a}^r$.

Thm. 14.13. $(A,\mathfrak{m})$: Noether, local. $\mathfrak{q}$: $\mathfrak{m}$-準素イデアル

$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{q}$ の節減なら $\mathfrak{b}$ も $\mathfrak{m}$-準素で、

任意の M : f.g. A-Mod に対し $e(\mathfrak{q},M) = e(\mathfrak{b},M)$

prf. $\mathfrak{q}^{r+1} = \mathfrak{b}\mathfrak{q}^r$ なら $\mathfrak{q}^{r+1} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$ より $\mathfrak{b}$: $\mathfrak{m}$-準素.

$$\ell(M/\mathfrak{b}^{n+r}M) \geq \ell(M/\mathfrak{q}^{n+r}M) = \ell(M/\mathfrak{b}^n\mathfrak{q}^rM) \geq \ell(M/\mathfrak{b}^nM)$$

$\rightsquigarrow e(\mathfrak{q},M) = e(\mathfrak{b},M)$

Thm. 14.13. □

Thm. 14.14. $(A, \mathfrak{m}, k)$: Noether, local. $\dim = d$. $|k| = \infty$

$\mathfrak{q} = (u_1, \dots, u_s)$: $\mathfrak{m}$-準素イデアル.

$u_1, \dots, u_s$ の "十分一般な" d 個の線形結合 $y_i = \sum a_{ij} u_j$ を取ると

$\mathfrak{b} = (y_1, \dots, y_d)$ は $\mathfrak{q}$ の節減で、$\{y_1, \dots, y_d\}$ は A の巴系.

prf. $d=0$ なら $\mathfrak{q}$ はべき零なので (0) が節減で、成り立つ. 以下 $d>0$.

Step 1 $u_1, \dots, u_s$ についての零形式イデアルを Q とする.

$$
\begin{aligned}
k[X_1, \dots, X_s]/Q &\cong \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{q}^n / \mathfrak{q}^n \mathfrak{m} \\
&= A/\mathfrak{m} \otimes_A \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{q}^n \\
&= A/\mathfrak{m} \otimes_{A/\mathfrak{q}} A/\mathfrak{q} \otimes_A \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{q}^n \\
&= A/\mathfrak{m} \otimes_{A/\mathfrak{q}} \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1} = k \otimes_{A/\mathfrak{q}} \mathrm{gr}_\mathfrak{q}(A)
\end{aligned}
$$

これのHilbert関数を $\varphi(n)$ とする.

$$\varphi(n) = l(\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^n\mathfrak{m}) \leq l(\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}) \leq \varphi(n) \cdot l(A/\mathfrak{q})$$

$\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$ $\cong$ $\mathfrak{q}^n \otimes_A A/\mathfrak{q}$

$n \gg 0$ で $d-1$ 次 (14.5 より)

$\cong$: q prf

よって $\varphi(n)$ も $d-1$ 次.

$\rightsquigarrow$ 13.8 (ii) より $\dim k[X_1, \dots, X_s]/Q = d$.

$\begin{cases} V := kX_1 + \cdots + kX_s \subseteq k[X_1, \dots, X_s]. \\ P_1, \dots, P_t : Q \text{ の極小素因子.} \end{cases}$

仮定 $d>0$ とこれより $P_i \not\supseteq V$ で $P_i \cap V \subsetneq V$. : k-Vect.

k : 無限体より $V \neq \bigcup_{i=1}^{t} (P_i \cap V)$

$\rightsquigarrow$ 1次式 $l_1(X_1, \dots, X_s) \in V \setminus \bigcup P_i$ を取れる.

$d>1$ なら [$\rightsquigarrow$ 1次式 $l_2(X_1, \dots, X_s) \in V \setminus \bigcup (Q, l_1)$ の極小素因子 を取れる.

⋮ くりかえす

$\rightsquigarrow$ $(Q, l_1, \dots, l_d)$ は $(X_1, \dots, X_s)$-準素.

∵ 重要な考察：$k[X_1,\dots,X_s]/Q$ は $(X_1,\dots,X_s)$ を極大とする局所環。
(実際、$k[X_1,\dots,X_s]/Q \cong \bigoplus \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^n\mathfrak{m}$ は $X_i \mapsto u_i$ なので
$(X_1,\dots,X_s) \cong \bigoplus_{n\geq 1} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^n\mathfrak{m}$：無縁イデアル)
帰納的に $(Q, l_1,\dots,l_d)$ の Q 上の高さは d と分かるので、これを含む
素イデアルは、Q を含む唯一の極大イデアルである $(X_1,\dots,X_s)$ のみ。

Step 2　下の claim を示す。u は $u_1,\dots,u_s$ の略記。

Claim.
$\{L_i(u) = \sum a_{ij} u_j \in A\}_i$ が生成するイデアル $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{q}$ の節減
$\Leftrightarrow$ $\{l_i(X) = \sum \overline{a_{ij}} X_j\}_i$ と Q で生成されるイデアルが $(X_1,\dots,X_s)$-準素。

∵ ($\Rightarrow$) $\mathfrak{q}^{r+1} \overset{\text{節減の定義}}{=} \mathfrak{b}\mathfrak{q}^r$. 任意の $M(X)$：$X_1 \sim X_s$ の $r+1$ 次単項式に対し、

$$M(u) = \sum_i^t L_i(u) F_i(u)$$

F_i は r 次斉次 とかける。

$$M(u) - \sum_i^t L_i(u) F_i(u) = 0 \in \mathfrak{q}^{r+1}\mathfrak{m}$$

零形式イデアル Q の定義

$$\overline{M}(X) - \underbrace{\sum_i^t l_i(X)\overline{F_i}(X)}_{\in (l_1,\dots,l_t)} \in Q.$$

つまり $(X_1,\dots,X_s)^{r+1} \subseteq (Q, l_1,\dots,l_t)$
$\therefore (Q, l_1,\dots,l_t)$ は $(X_1,\dots,X_s)$-準素。

($\Leftarrow$) 逆にたどると、任意の $M(X)$：$r+1$ 次単項式に対し

$$M(u) - \underbrace{\sum_i^t L_i(u)F_i(u)}_{\in \mathfrak{b}\mathfrak{q}^r} \in \mathfrak{q}^{r+1}\mathfrak{m}$$

までは分かる。よって

$$\mathfrak{q}^{r+1} \subseteq \mathfrak{b}\mathfrak{q}^r + \mathfrak{q}^{r+1}\mathfrak{m} \overset{\text{NAK}}{\rightsquigarrow} \mathfrak{q}^{r+1} = \mathfrak{b}\mathfrak{q}^r,\ \mathfrak{b} \text{は節減}$$

ラスト

Step 3 Step 1 + Step 2 より. $\mathfrak{b} = \overset{d元生成}{(y_1, \dots, y_d)}$: $\mathfrak{q}$ の節減が存在する.

- $\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{m}$ー準素. ($\because$ $\mathfrak{m} = r(\mathfrak{q}^{r+1}) = r(\mathfrak{b}\mathfrak{q}^r) = r(\mathfrak{b}) \cap r(\mathfrak{q}^r) = r(\mathfrak{b}) \cap \mathfrak{m}$ より $r(\mathfrak{b}) \supseteq \mathfrak{m}$)

よって $y_1, \dots, y_d$ は巴系.

- $y_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} u_j$ $(1 \le i \le d)$ とおくと. sd コの係数 a_{ij} $\left(\begin{smallmatrix} 1 \le i \le d \\ 1 \le j \le s \end{smallmatrix}\right)$ が現れる.

claim. 「sd 個の不定元 $\{z_{ij}\}$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \le i \le d \\ 1 \le j \le s \end{smallmatrix}\right)$ についての, ν 個の $\overset{k係数}{多項式}$ $\{D_\alpha(z_{ij})\}_{1 \le \alpha \le \nu}$ があり,
『$y_i = \sum a_{ij} u_j$ が $\mathfrak{q}$ の節減を生成 $\Leftrightarrow$ α_{ij} は $\{D_\alpha\}$ の共通零点でない』」.

すると. $\mathfrak{q}$ の節減を生成する a_{ij} は Zariski 開空間であり, Thm. は完結する.

$\because$ Q の生成元 $\{G_k(X) : e_k次斉次\}_{1 \le k \le m}$ をとる.

また $\{\alpha_{ij} \in k\}_{\substack{1 \le i \le d \\ 1 \le j \le s}}$ を任意にとり. $l_i(X) = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} X_j$ とおく.

ここで,

y_i ら が $\mathfrak{q}$ の節減を生成

$\overset{Step 2}{\Longleftrightarrow}$ $(Q, l_1, \dots, l_d)$ が $(X_1, \dots, X_s)$ー準素.

$\Longleftrightarrow$ $\exists n,\ (X_1, \dots, X_s)^n \subseteq (Q, l_1, \dots, l_d)$

$\Longleftrightarrow$ $\exists n,\ k[X_1, \dots, X_s]_n = \underbrace{(Q, l_1, \dots, l_d)_n}_{G_k : e_k次斉次式で生成} = \{\underbrace{\sum (n-e_k次) G_k + \sum (n-1次) l_i}_{k\text{-vect としての生成元を有限個でとれる.}}\}$

$\dim_k = $ (n次単項式の個数)　　有限次元　　有限次元

（l_i以外のところは a_{ij} によらずに）

$\Longleftrightarrow$ $\exists n,$ これを並べた (α_{ij} の1次式成分の) 行列の
(n次単項式の個数)ー次小行列式に 非零なものが存在する!

否定をとり

y_i らが $\mathfrak{q}$ の節減を生成しない

$\Longleftrightarrow$ $\forall n,$ ____________________ に, α_{ij} が共通零点となっている.

n を束ねて全ての小行列式で生成されるイデアルを考え,
その有限生成元を取ればよい.

Thm. 14.14 □.